令和６年度の本試験　解答

$\boxed{1}$

(1)　$x^3-3x^2-9x+a=0$　より

$f(x)=x^3-3x^2-9x+a$ とする。

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x^2-2x-3)=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$ の解は　$x=-1$, $x=3$

増減表は

x		-1		3	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$a+5$	↘	$a-27$	↗

与えられた３次方程式が異なる３つの実数解をもつためには

$y=f(x)$ と x 軸が３点で交わればよい。

$a+5>0$　かつ $a-27<0$

$-5<a<27$

(2) $f(x)=-x^2+4x\int_0^1 f(t)dt+\int_0^2 f(t)dt$

$\mathrm{A}=\int_0^1 f(t)dt$, $\mathrm{B}=\int_0^2 f(t)dt$　とおく。

$f(x)=-x^2+4\mathrm{A}x+\mathrm{B}$ 。

$$\mathrm{A}=\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1(-t^2+4\mathrm{A}t+\mathrm{B})dt=\left[-\frac{t^3}{3}+2\mathrm{A}t^2+\mathrm{B}t\right]_0^1=-\frac{1}{3}+2\mathrm{A}+\mathrm{B}$$

よって $\mathrm{A}+\mathrm{B}=\frac{1}{3}$

$$\mathrm{B}=\int_0^2 f(t)dt=\int_0^2(-t^2+4\mathrm{A}t+\mathrm{B})dt=\left[-\frac{t^3}{3}+2\mathrm{A}t^2+\mathrm{B}t\right]_0^2=-\frac{8}{3}+8\mathrm{A}+2\mathrm{B}$$

よって $8\mathrm{A}+\mathrm{B}=\frac{8}{3}$

$\mathrm{A}=\frac{1}{3}$, $\mathrm{B}=0$

$f(x)=-x^2+\frac{4}{3}x$

(3)　△ABC において余弦定理より

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC\cos B = 4^2 + 3^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos\theta$

$= 25 - 24\cos\theta$ ・・・①

△ADC において余弦定理より

$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2AD \cdot DC\cos D = 4^2 + 1^2 - 2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot \cos(\pi - \theta)$

$= 17 + 8\cos\theta$ ・・・②

$25 - 24\cos\theta = 17 + 8\cos\theta$

$32\cos\theta = 8$

①　②　より　$\cos\theta = \dfrac{1}{4}$

$AC^2 = 19$　よって　$AC = \sqrt{19}$

$AP : PC = \triangle ABD : \triangle BCD = \dfrac{1}{2}AB \cdot AD\sin A : \dfrac{1}{2}CB \cdot CD\sin(\pi - A)$

$AB \cdot AD : CB \cdot CD = 16 : 3$

$AP = AC \cdot \dfrac{16}{19} = \dfrac{16\sqrt{19}}{19}$

(4) $n = 1$ のとき　$a_2 = r(1 - a_1) = r(1 - \dfrac{1}{3}) = \dfrac{2}{3}r$

$n = 2$ のとき　$a_3 = r\{1 - (a_1 + a_2)\} = r(1 - \dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{3}r) = \dfrac{2}{3}r(1 - r)$

$a_{n+1} = r(1 - S_n)$ より　$a_n = r(1 - S_{n-1})$

$n \geqq 2$ のとき

$a_{n+1} - a_n = r(S_{n-1} - S_n) = -ra_n$

$a_{n+1} = (1 - r)a_n$　$(n \geqq 2)$

これは，第 2 項から公比 $(1 - r)$ の等比数列であることを示している。

この式が $n = 1$ で成り立つためには、$\dfrac{1}{3}(1 - r) = \dfrac{2}{3}r$

$1 - r = 2r$ より　$r = \dfrac{1}{3}$

$0 < r < 1$ を満たしている。

このとき数列 $\{a_n\}$ は初項 $\dfrac{1}{3}$ 公比 $\dfrac{2}{3}$ の等比数列である。

$\boxed{2}$

(1)　$\mathrm{OP}:\mathrm{PC}=s:(1-s)$　より　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}=s\,\vec{c}$

$\mathrm{AQ}:\mathrm{QB}=t:(1-t)$　より　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-t)\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{OBA}}=(1-t)\,\vec{a}+t\,\vec{b}$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}-s\vec{c}$

(2)　$\mathrm{PQ}\perp\mathrm{OC}$, $\mathrm{PQ}\perp\mathrm{AB}$　より

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\{(1-t)\vec{a}+t\vec{b}-s\vec{c}\}\cdot\vec{c}=0$

$(1-t)\vec{a}\cdot\vec{c}+t\vec{b}\cdot\vec{c}-s|\vec{c}|^2=0$

$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\dfrac{1}{2}$,　$|\vec{c}|=1$ より

$\dfrac{1-t}{2}+\dfrac{t}{2}-s=0$

$s=\dfrac{1}{2}$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\{(1-t)\vec{a}+t\vec{b}-\dfrac{1}{2}\vec{c}\}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$　より

$(1-t)\vec{a}\cdot\vec{b}-(1-t)|\vec{a}|^2+t|\vec{b}|^2-t\vec{a}\cdot\vec{b}-\dfrac{1}{2}\vec{b}\cdot\vec{c}+\dfrac{1}{2}\vec{c}\cdot\vec{a}=0$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=\dfrac{1}{2}$,　$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$, $s=\dfrac{1}{2}$ より

$\dfrac{1-t}{2}-(1-t)+t-\dfrac{t}{2}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}=0$

$t=\dfrac{1}{2}$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}-\dfrac{1}{2}\vec{c}$

$|\mathrm{PQ}|^2=\left|\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}-\dfrac{1}{2}\vec{c}\right|^2=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{2}{4}\cdot\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{4}\cdot\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{4}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(3)　△OAB , △CAB の重心がそれぞれL , M だから

$$\overrightarrow{OL}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{3}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{3}$$

$$\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{3}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

LN: NM $=u:(1-u)$ より

$\overrightarrow{ON}=(1-u)\overrightarrow{OL}+u\,\overrightarrow{OM}$　　（$0\leqq u\leqq 1$ ）と表せる。

$$=(1-u)\frac{\vec{a}+\vec{b}}{3}+u\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

$$=\frac{\vec{a}}{3}+\frac{\vec{b}}{3}+\frac{u\vec{c}}{3}$$

(4)

$$\overrightarrow{ON}=\alpha\overrightarrow{OP}+\beta\overrightarrow{OA}+\gamma\overrightarrow{OB}=\frac{\alpha}{2}\vec{c}+\beta\vec{a}+(1-\alpha-\beta)\vec{b}$$

$$=\beta\vec{a}+(1-\alpha-\beta)\vec{b}+\frac{\alpha}{2}\vec{c}$$

$$=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{u}{3}\vec{c}$$

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ は一次独立（4 点O,A,B,C は同一平面上にない）から

$\alpha=\frac{1}{3}$, $\beta=\frac{1}{3}$, $\gamma=\frac{1}{3}$

$u=\frac{1}{2}$ よりLN : NM＝1 : 1

(5)　(4) より，$\overrightarrow{ON}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}$ である。

△PAB の重心の位置ベクトルは　$\dfrac{\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{3}$ である。

$$\frac{\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{3}=\frac{\frac{\vec{c}}{2}+\vec{a}+\vec{b}}{3}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}=\overrightarrow{ON}$$

したがってN は△PAB の重心である。

L,N は△OAB と△PAB の重心だからOL : LQ＝PN : NQ＝2 : 1

$$\triangle QLN=\triangle QOP\times\frac{1}{9}=\left(\frac{1}{2}OP\cdot PQ\right)\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{9}=\frac{\sqrt{2}}{72}$$

$\boxed{3}$

(1) $\vec{a}-\vec{b}=(1,p)-(q,\ -1)=(1-q,p+1)$, $\vec{c}=(-1,1)$

$(\vec{a}-\vec{b})\perp\vec{c}$ より $(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{c}=-1+q+p+1=0$

よって$p+q=0$ ・・・①

$\vec{b}-\vec{c}=(q,\ -1)-(-1,1)=(q+1,\ -2)$

$(\vec{b}-\vec{c})/\!/\vec{a}$ より $\vec{b}-\vec{c}=k\vec{a}$ （k は実数） $(q+1,\ -2)=k(1,p)$

$q+1=k$, $-2=kp$ つまり $(q+1)p=-2$ ・・・②

①，②より

$p(-p+1)=-2$

$p^2-p-2=0$

$(p-2)(p+1)=0$

$p=2,q=-2,k=-1$ または $p=-1,q=1,k=2$

$p=2,q=-2$ このとき $\vec{a}=(1,\ 2)$, $\vec{b}=(-2,-1)$

$\vec{a},\ \vec{b},\vec{c}$ はそれぞれ異なるので適する。

$p=-1,q=1$ このとき $\vec{a}=(1,\ -1)$,$\vec{b}=(1,\ -1)$

$\vec{a}=\vec{b}$ となり不適である。

よって $p=2,q=-2$

(2) $n=1$ のとき $a_2=r(1-a_1)=r(1-\frac{1}{3})=\frac{2}{3}r$

$n=2$ のとき $a_3=r\{1-(a_1+a_2)\}=r(1-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}r)=\frac{2}{3}r(1-r)$

$a_{n+1}=r(1-\mathrm{S}_n)$ より $a_n=r(1-\mathrm{S}_{n-1})$

$n\geqq2$ のとき $a_{n+1}-a_n=r(\mathrm{S}_{n-1}-\mathrm{S}_n)=-ra_n$

$a_{n+1}=(1-r)a_n$ $(n\geqq2)$

これは，第２項から公比$(1-r)$ の等比数列であることを示している。

この式が$n=1$ で成り立つためには，$\frac{1}{3}(1-r)=\frac{2}{3}r$

$1-r=2r$ より $r=\frac{1}{3}$

$0<r<1$ を満たしている。

このとき数列$\{a_n\}$ は初項$\frac{1}{3}$ 公比$\frac{2}{3}$ の等比数列である。

(3)　k を整数とする。

$n=3k$ のとき，　$n^2=9k^2=3(3k^2)$ ・・・・・・・・・・・・・・・・①

$n=3k+1$ のとき，$n^2=9k^2+6k+1=3(3k^2+2k)+1$ ・・・・・②

$n=3k+2$ のとき，$n^2=9k^2+12k+4=3(3k^2+4k+1)+1$ ・・・③

したがって，n^2 を３で割ると，割り切れるか、あるいは１余るかのいずれかだから
n^2 を３で割って２余ることはない。

l および m が３の倍数でないと仮定する。
②③より，l^2 および m^2 は３で割ると１余る。
よって $l^2=3s+1$，$m^2=3t+1$　（s，t は整数）とおけるので
$l^2+m^2=3(s+t)+2$ となる。
つまり，l^2+m^2 は，３で割ると２余る。

n^2 は３で割ると２余ることはないので，$l^2+m^2=n^2$ は成り立たない。

したがって，l または m は３の倍数である。

$\boxed{4}$

(1)　$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2t^2 - 1$

$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x = 4t^3 - 3t$

$\cos x + \cos 2x + \cos 3x$
$= t + (2t^2 - 1) + (4t^3 - 3t)$
$= 4t^3 + 2t^2 - 2t - 1$

$4t^3 + 2t^2 - 2t - 1 > 0$

$(2t^2 - 1)(2t + 1) > 0$

$(\sqrt{2}\,t + 1)(\sqrt{2}\,t - 1)(2t + 1) > 0$

$0 \leqq x \leqq \pi$ より　$-1 \leqq t \leqq 1$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} < t < -\frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{\sqrt{2}} < t \leqq 1$$

求めるx の範囲は

$$0 \leqq x < \frac{\pi}{4}\ ,\ \frac{2}{3}\pi < x < \frac{3}{4}\pi$$

(2)　$x = y = 0$ のとき

$f(0 + 0) = f(0) + f(0)$

よって$f(0) = 0$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = f'(0) = 2$$

$f'(x) = 2$ より

$f(x) = 2x + c$　（c は定数）

$f(0) = 0$ より$c = 0$

$f(x) = 2x$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{x^2-x^4}{1+e^x}dx$ において，$t=-x$ に置換すると

積分区間は

x	-1	$\to$	0
t	1	$\to$	0

$dx=-dt$

$$\int_{-1}^{0}\frac{x^2-x^4}{1+e^x}dx=\int_{1}^{0}\frac{t^2-t^4}{1+e^{-t}}(-1)dt=\int_{0}^{1}\frac{e^t(t^2-t^4)}{e^t+1}dt=\int_{0}^{1}\frac{e^x(x^2-x^4)}{1+e^x}dx$$

したがって　$\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{x^2-x^4}{1+e^x}dx=\int_{0}^{1}\frac{e^x(x^2-x^4)}{1+e^x}dx$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\frac{x^2-x^4}{1+e^x}dx&=\int_{-1}^{0}\frac{x^2-x^4}{1+e^x}dx+\int_{0}^{1}\frac{x^2-x^4}{1+e^x}dx\\&=\int_{0}^{1}\frac{e^x(x^2-x^4)}{1+e^x}dx+\int_{0}^{1}\frac{x^2-x^4}{1+e^x}dx\\&=\int_{0}^{1}(x^2-x^4)dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right]_0^1=\frac{2}{15}\end{aligned}$$

$\boxed{5}$

(1)　$\vec{a}-\vec{b}=(1,p)-(q,\ -1)=(1-q,p+1)$　,　$\vec{c}=(-1,1)$

$(\vec{a}-\vec{b})\perp\vec{c}$　より　$(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{c}=-1+q+p+1=0$

よって$p+q=0$　・・・①

$\vec{b}-\vec{c}=(q,-1)-(-1,1)=(q+1,-2)$

$(\vec{b}-\vec{c})/\!/\vec{a}$　　より　$\vec{b}-\vec{c}=k\vec{a}$　(k は実数)　$(q+1,-2)=k(1,p)$

$q+1=k$, $-2=kp$　つまり　$(q+1)p=-2$ ・・・②

①, ②より

$p(-p+1)=-2$

$p^2-p-2=0$

$(p-2)(p+1)=0$

$p=2, q=-2, k=-1$　または　$p=-1, q=1, k=2$

$p=2, q=-2$　このとき　$\vec{a}=(1,\ 2)$, $\vec{b}=(-2,-1)$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ はそれぞれ異なるので適する。

$p=-1, q=1$　このとき　$\vec{a}=(1,-1)$, $\vec{b}=(1,-1)$

$\vec{a}=\vec{b}$ となり不適である。

よって　$p=2, q=-2$

(2)　$x=y=0$ のとき

$f(0+0)=f(0)+f(0)$

よって$f(0)=0$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=f'(0)=2$$

$f'(x)=2$ より

$f(x)=2x+c$　　(c は定数)

$f(0)=0$ より $c=0$

$f(x)=2x$

(3)　$\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{x^2-x^4}{1+e^x}dx$ において，$t=-x$ に置換すると

積分区間は

x	-1	$\to$	0
t	1	$\to$	0

$dx=-dt$

$$\int_{-1}^{0}\frac{x^2-x^4}{1+e^x}dx=\int_{1}^{0}\frac{t^2-t^4}{1+e^{-t}}(-1)dt=\int_{0}^{1}\frac{e^t(t^2-t^4)}{e^t+1}dt=\int_{0}^{1}\frac{e^x(x^2-x^4)}{1+e^x}dx$$

したがって　$\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{x^2-x^4}{1+e^x}dx=\int_{0}^{1}\frac{e^x(x^2-x^4)}{1+e^x}dx$

$$\int_{-1}^{1}\frac{x^2-x^4}{1+e^x}dx=\int_{-1}^{0}\frac{x^2-x^4}{1+e^x}dx+\int_{0}^{1}\frac{x^2-x^4}{1+e^x}dx$$

$$=\int_{0}^{1}\frac{e^x(x^2-x^4)}{1+e^x}dx+\int_{0}^{1}\frac{x^2-x^4}{1+e^x}dx$$

$$=\int_{0}^{1}(x^2-x^4)dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right]_0^1=\frac{2}{15}$$

(4)　k を整数とする。

$n=3k$ のとき，　$n^2=9k^2=3(3k^2)$ ・・・・・・・・・・・・・・・・①

$n=3k+1$ のとき，$n^2=9k^2+6k+1=3(3k^2+2k)+1$ ・・・・・②

$n=3k+2$ のとき，$n^2=9k^2+12k+4=3(3k^2+4k+1)+1$ ・・・③

したがって，n^2 を 3 で割ると，割り切れるか、あるいは 1 余るかのいずれかだから

n^2 を 3 で割って 2 余ることはない。

l およびm が 3 の倍数でないと仮定する。

②③より，l^2 およびm^2 は 3 で割ると 1 余る。

よって$l^2=3s+1$，$m^2=3t+1$　（s，t は整数）とおけるので

$l^2+m^2=3(s+t)+2$ となる。

つまり，l^2+m^2 は，3 で割ると 2 余る。

n^2 は 3 で割ると 2 余ることはないので，$l^2+m^2=n^2$ は成り立たない。

したがって，l またはm は 3 の倍数である。

$\boxed{6}$

(1)　$f(x)=x^3-8$ より

$f'(x)=3x^2$

接線 l_n の式は　$y=3a_n{}^2(x-a_n)+(a_n{}^3-8)$

$=3a_n{}^2x-2a_n{}^3-8$

(2)　接線 l_n と x 軸との交点が　$x=a_{n+1}$

$0=3a_n{}^2a_{n+1}-2a_n{}^3-8$

$3a_n{}^2a_{n+1}=2a_n{}^3+8$

$a_1>0$ だから，$a_2>0$, $a_3>0$, ・・・

帰納的に　$a_n>0$

よって　$a_{n+1}=\dfrac{2a_n{}^3+8}{3a_n{}^2}$

$=\dfrac{2}{3}(a_n+\dfrac{4}{a_n{}^2})$

(3)　$a_n>2$ を示す。

$n=1$ のとき、　$a_1>2$ は満たされている。

$n=k$ のとき　$a_k>2$ が成り立つと仮定する。

$n=k+1$ について

$a_{k+1}-2=\dfrac{2a_k{}^3+8}{3a_k{}^2}-2$

$=\dfrac{2(a_k{}^3-3a_k{}^2+4)}{3a_k{}^2}$

$=\dfrac{2(a_k-2)^2(a_k+1)}{3a_k{}^2}>0$

よって $a_{k+1}>2$

すべての自然数 n で $a_n>2$ が成り立つ。

(4) $a_n - a_{n+1} = a_n - \dfrac{2a_n{}^3+8}{3a_n{}^2}$

$= \dfrac{a_n{}^3-8}{3a_n{}^2} > 0$

よって$a_n > a_{n+1}$

(5) $\dfrac{2}{3}(a_n-2)-(a_{n+1}-2)$

$= \dfrac{2}{3}(a_n-2)-\{\dfrac{2}{3}(a_n+\dfrac{4}{a_n{}^2})-2\}$

$= \dfrac{2}{3}\{(a_n-2)-(a_n+\dfrac{4}{a_n{}^2})+3\}$

$= \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{(a_n{}^2-4)}{a_n{}^2} = \dfrac{2(a_n+2)(a_n-2)}{3a_n{}^2} > 0$

よって　$a_{n+1}-2 < \dfrac{2}{3}(a_n-2)$

また，　$a_n > 2$ より　$0 < a_n - 2 < (\dfrac{2}{3})^{n-1}(a_1-2)$

$n\to\infty$ のとき　$(\dfrac{2}{3})^{n-1}(a_1-2)\to 0$

はさみうちの原理より　$a_n - 2 \to 0$

よって$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$

$\boxed{7}$

(1)　求める体積V_1は、

$$V_1=\pi\int_0^1\{x^2-(x^2)^2\}dx$$

$$=\pi\int_0^1(x^2-x^4)dx$$

$$=\pi\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{5}x^5\right]_0^1=\pi\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)=\frac{2}{15}\pi$$

(2)　直線mは、傾き-1で点$P(t, t^2)$を通るので

$y=-(x-t)+t^2=-x+t^2+t$

直線mとlとの交点Qのx座標は、方程式$x=-x+t^2+t$の解である。

よって　$x=\dfrac{t^2+t}{2}$

$Q\left(\dfrac{t^2+t}{2}, \dfrac{t^2+t}{2}\right)$

(3)　線分PQの長さは、mの傾きが-1より、2点P, Qのx座標の差の$\sqrt{2}$倍である。

$$PQ=\sqrt{2}\left(t-\frac{t^2+t}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(t-t^2)$$

$$PQ^2=\frac{1}{2}(t-t^2)^2$$

(4)　$OQ=s$より、$s=\sqrt{2}\cdot\dfrac{t^2+t}{2}=\dfrac{\sqrt{2}(t^2+t)}{2}$だから

$$\frac{ds}{dt}=\frac{\sqrt{2}(2t+1)}{2}$$

(5) $V_2=\pi\int_0^{\sqrt{2}}PQ^2\,ds=\pi\int_0^{\sqrt{2}}\frac{(t-t^2)^2}{2}ds$

$0\leqq s\leqq\sqrt{2}$ は$0\leqq t\leqq 1$ に対応し、

$$\frac{ds}{dt}=\frac{\sqrt{2}(2t+1)}{2}$$

$$\begin{aligned}V_2&=\pi\int_0^{\sqrt{2}}PQ^2\,ds\\&=\pi\int_0^{\sqrt{2}}\frac{(t-t^2)^2}{2}ds\\&=\pi\int_0^1\frac{(t-t^2)^2}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}(2t+1)}{2}dt\\&=\frac{\sqrt{2}\pi}{4}\int_0^1(t^4-2t^3+t^2)(2t+1)dt\\&=\frac{\sqrt{2}\pi}{4}\int_0^1(2t^5-3t^4+t^2)dt\\&=\frac{\sqrt{2}\pi}{4}\left[\frac{t^6}{3}-\frac{3t^5}{5}+\frac{t^3}{3}\right]_0^1\\&=\frac{\sqrt{2}\pi}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\right)\\&=\frac{\sqrt{2}\pi}{4}\cdot\frac{1}{15}\\&=\frac{\sqrt{2}\pi}{60}\end{aligned}$$

よって　$\dfrac{V_2}{V_1}=\dfrac{\frac{\sqrt{2}\pi}{60}}{\frac{2}{15}\pi}=\dfrac{\sqrt{2}}{8}$

$\boxed{8}$

(1) $\mathrm{AQ}_n = \mathrm{AP}_n \tan\theta = a_n \tan\theta$

$\mathrm{BR}_n = (1-\mathrm{AQ}_n)\tan\theta = (1-a_n\tan\theta)\tan\theta = \tan\theta - a_n\tan^2\theta$

$\mathrm{CS}_n = (1-\mathrm{BR}_n)\tan\theta = \tan\theta - \tan^2\theta + a_n\tan^3\theta$

(2) $\mathrm{AP}_{n+1} = 1-\mathrm{OP}_{n+1} = 1-\mathrm{OS}_n\tan\theta = 1-(1-\mathrm{CS}_n)\tan\theta$

$a_{n+1} = 1-(1-\tan\theta+\tan^2\theta-a_n\tan^3\theta)\tan\theta$

$a_{n+1} = 1-\tan\theta+\tan^2\theta-\tan^3\theta+a_n\tan^4\theta$

(3) (2)で得られた漸化式を

$a_{n+1}-\alpha = \tan^4\theta\,(a_n-\alpha)$ とおくと

α は特性方程式

$\alpha = 1-\tan\theta+\tan^2\theta-\tan^3\theta+\alpha\tan^4\theta$ の解である。

$0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ より $0<\tan^4\theta<1$

$$\alpha = \frac{1-\tan\theta+\tan^2\theta-\tan^3\theta}{1-\tan^4\theta} = \frac{(1-\tan\theta)(1+\tan^2\theta)}{(1-\tan\theta)(1+\tan\theta)(1+\tan^2\theta)}$$

$$\alpha = \frac{1}{1+\tan\theta}$$

数列$\left\{a_n-\dfrac{1}{1+\tan\theta}\right\}$は，初項$a_1-\dfrac{1}{1+\tan\theta}$ ，公比$\tan^4\theta$の等比数列

一般項は $a_n = \left(a_1-\dfrac{1}{1+\tan\theta}\right)(\tan^4\theta)^{n-1}+\dfrac{1}{1+\tan\theta}$

(4) $P_1 = P_2$ のとき，

$a_1 = a_2$ より

$a_1 = 1 - \tan\theta + \tan^2\theta - \tan^3\theta + a_1\tan^4\theta$

$$a_1 = \frac{1}{1+\tan\theta}$$

$P_1 \neq P_2$ のとき，

$$a_n = \left(a_1 - \frac{1}{1+\tan\theta}\right)(\tan^4\theta)^{n-1} + \frac{1}{1+\tan\theta}$$

$0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$ より $0 < \tan^4\theta < 1$

よって$\{a_n\}$は収束し， $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{1+\tan\theta}$

a_nは，$P_1 = P_2$ のときのa_1に近づく。

このとき，

$OP_n : P_nA = (1-a_n) : a_n$ だから

$$= 1 - \frac{1}{1+\tan\theta} : \frac{1}{1+\tan\theta} = \tan\theta : 1 = \sin\theta : \cos\theta$$

つまり，線分OAを$\sin\theta : \cos\theta$に内分する点に近づく。

$\boxed{9}$

(1) $z_1 = a + bi,\ z_2 = c + di$　ただし，a,b,c,d は実数とする。

$\overline{z_1} + \overline{z_2} = (a - bi) + (c - di) = (a + c) - (b + d)i$
$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a + bi) + (c + di)} = \overline{(a + c) + (b + d)i} = (a + c) - (b + d)i$

よって$\overline{z_1} + \overline{z_2} = \overline{z_1 + z_2}$

$\overline{z_1}\,\overline{z_2} = (a - bi)(c - di) = (ac - bd) - (bc + ad)i$
$\overline{z_1 z_2} = \overline{(a + bi)(c + di)} = \overline{(ac - bd) + (bc + ad)i} = (ac - bd) - (bc + ad)i$

よって$\overline{z_1}\,\overline{z_2} = \overline{z_1 z_2}$

(2) $z = \alpha$ はこの方程式の解だから
$\alpha^4 + p\alpha^2 + q\alpha + 27 = 0$
両辺の共役複素数をとると
$\overline{\alpha^4 + p\alpha^2 + q\alpha + 27} = \overline{0}$

$\overline{\alpha^4} + p\overline{\alpha^2} + q\overline{\alpha} + \overline{27} = \overline{0}$
$(\overline{\alpha})^4 + p(\overline{\alpha})^2 + q(\overline{\alpha}) + 27 = 0$
よって$z = \overline{\alpha}$ はこの方程式の解である。

(3) $\alpha = \alpha^2$ とすれば，$\alpha = 0$,$\alpha = 1$ となり，α が虚数であることに反するので，$\alpha \fallingdotseq \alpha^2$

また，$\alpha = x + yi\ (x > 0\ ,\ y > 0)$ とすると，$\alpha^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ となり，α^2 は虚数である。
したがって（2）より，
4 次方程式$z^4 + pz^2 + qz + 27 = 0$ の解は、$z = \alpha\ ,\ \overline{\alpha}\ ,\ \alpha^2\ ,\overline{\alpha^2}$　である。
$z^4 + pz^2 + qz + 27 = (z - \alpha)\,(z - \alpha^2)\,(z - \overline{\alpha})\,(z - \overline{\alpha^2})$
3 次の項の係数を比較すると
$0 = -(\alpha + \overline{\alpha} + \alpha^2 + \overline{\alpha^2})$
$(\alpha + \alpha^2) + (\overline{\alpha} + \overline{\alpha^2}) = 0$
$(\alpha + \alpha^2) + (\overline{\alpha + \alpha^2}) = 0$
したがって$(\alpha + \alpha^2)$ の実部は0 である。

ここで$\alpha+\alpha^2=0$とすると

$\alpha=0, \alpha=-1$となり,

αは実部，虚部ともに正の虚数であるから

$\alpha+\alpha^2 \fallingdotseq 0$

よって　$(\alpha+\alpha^2)$は純虚数である。

(4)　(3)の　$z^4+pz^2+qz+27=(z-\alpha)(z-\alpha^2)(z-\overline{\alpha})(z-\overline{\alpha^2})$より

定数項を比較すると

$27=\alpha\cdot\alpha^2\cdot\overline{\alpha}\cdot\overline{\alpha^2}$

$27=|\alpha|^2|\alpha|^4=|\alpha|^6$

$|\alpha|$は正の実数だから$|\alpha|=\sqrt{3}$

$\alpha=x+yi$　$(x>0, y>0)$

$|\alpha|=\sqrt{3}$　より，$x^2+y^2=3$・・・・①

$\alpha+\alpha^2=(x+yi)+(x+yi)^2=(x+x^2-y^2)+(y+2xy)i$

$(\alpha+\alpha^2)$は純虚数だから　$x+x^2-y^2=0$・・・・②

①，②より

$x+x^2-(3-x^2)=0$

$2x^2+x-3=0$

$(2x+3)(x-1)=0$

$x>0, y>0$より

$x=1, y=\sqrt{2}$

このとき$y+2xy \fallingdotseq 0$を満たす。

$\alpha=1+\sqrt{2}i$

(5)　$\alpha^2=(1+\sqrt{2}i)^2=-1+2\sqrt{2}i$だから

4つの解は

$\alpha=1+\sqrt{2}i, \overline{\alpha}=1-\sqrt{2}i, \alpha^2=-1+2\sqrt{2}i, \overline{\alpha^2}=-1-2\sqrt{2}i$

$1+\sqrt{2}i, 1-\sqrt{2}i$　　を解とする2次方程式は　$z^2-2z+3=0$

$-1+2\sqrt{2}i, -1-2\sqrt{2}i$を解とする2次方程式は　$z^2+2z+9=0$

$z^4+pz^2+qz+27=(z^2-2z+3)(z^2+2z+9)$

$=z^4+8z^3-12z+27$

よって$p=8, q=-12$

$\boxed{10}$ 情報データ科学部の選択問題

(1)　求める体積V_1は、

$$V_1=\pi\int_0^1\{x^2-(x^2)^2\}dx$$

$$=\pi\int_0^1(x^2-x^4)dx$$

$$=\pi\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{5}x^5\right]_0^1=\pi(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})=\frac{2}{15}\pi$$

(2)　直線mは、傾き-1で点$P(t,t^2)$を通るので

$y=-(x-t)+t^2=-x+t^2+t$

直線mとlとの交点Qのx座標は、方程式$x=-x+t^2+t$の解である。

よって　$x=\dfrac{t^2+t}{2}$

$Q(\dfrac{t^2+t}{2},\dfrac{t^2+t}{2})$

(3)　線分PQの長さは、mの傾きが-1より、2点P，Qのx座標の差の$\sqrt{2}$倍である。

$PQ=\sqrt{2}(t-\dfrac{t^2+t}{2})=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(t-t^2)$

$PQ^2=\dfrac{1}{2}(t-t^2)^2$

(4)　$OQ=s$より、$s=\sqrt{2}\cdot\dfrac{t^2+t}{2}=\dfrac{\sqrt{2}(t^2+t)}{2}$だから

$\dfrac{ds}{dt}=\dfrac{\sqrt{2}(2t+1)}{2}$

(5)　$\mathrm{V}_2=\pi\int_0^{\sqrt{2}}\mathrm{PQ}^2\,ds=\pi\int_0^{\sqrt{2}}\frac{(t-t^2)^2}{2}ds$

$0\leqq s\leqq\sqrt{2}$ は$0\leqq t\leqq 1$ に対応し、

$$\frac{ds}{dt}=\frac{\sqrt{2}\,(2t+1)}{2}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}_2&=\pi\int_0^{\sqrt{2}}\mathrm{PQ}^2\,ds\\
&=\pi\int_0^{\sqrt{2}}\frac{(t-t^2)^2}{2}ds\\
&=\pi\int_0^{1}\frac{(t-t^2)^2}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}\,(2t+1)}{2}dt\\
&=\frac{\sqrt{2}\,\pi}{4}\int_0^{1}(t^4-2t^3+t^2)(2t+1)dt\\
&=\frac{\sqrt{2}\,\pi}{4}\int_0^{1}(2t^5-3t^4+t^2)dt\\
&=\frac{\sqrt{2}\,\pi}{4}\left[\frac{t^6}{3}-\frac{3t^5}{5}+\frac{t^3}{3}\right]_0^1\\
&=\frac{\sqrt{2}\,\pi}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\right)\\
&=\frac{\sqrt{2}\,\pi}{4}\cdot\frac{1}{15}\\
&=\frac{\sqrt{2}\,\pi}{60}
\end{aligned}$$

よって　$\dfrac{\mathrm{V}_2}{\mathrm{V}_1}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{2}\,\pi}{60}}{\dfrac{2}{15}\pi}=\dfrac{\sqrt{2}}{8}$

$\boxed{11}$　情報データ科学部の選択問題

(1)　標本平均は

$$m_1=\frac{9.0+9.0+8.0+8.0+9.0+9.0+10.0+9.0+10.0}{9}=\frac{81}{9}=9.0$$

標本分散は

$$S_1{}^2=\frac{0^2+0^2+(-1)^2+(-1)^2+0^2+0^2+1^2+0^2+1^2}{9}=\frac{4}{9}$$

(2)　母平均mに対する95 %の信頼区間は

母分散$\sigma^2=1$
標本の大きさ9
標本平均9 だから

$$9.0-1.96\frac{1}{\sqrt{9}}\leqq m\leqq 9.0+1.96\frac{1}{\sqrt{9}}$$

$8.346\leqq m\leqq 9.653$ より$8.35\leqq m\leqq 9.65$

(3)　$m_2=\dfrac{9.0+9.0+8.0+8.0+9.0+9.0+10.0+9.0+10.0+x}{10}=\dfrac{x+81}{10}$

標本平均は，（２乗平均）ー（平均）^{2}　として得られるので

$$S_2{}^2=\frac{(9.0)^2+(9.0)^2+(8.0)^2+(8.0)^2+(9.0)^2+(9.0)^2+(10.0)^2+(9.0)^2+(10.0)^2+x^2}{10}-\left(\frac{x+81}{10}\right)^2$$

$$=\frac{9x^2-162x+769}{100}=\frac{9(x-9)^2+40}{100}$$

$8\leqq x\leqq 10$ より　$8.9\leqq m_2\leqq 9.1$

$$\frac{2}{5}\leqq S_2{}^2\leqq\frac{49}{100}$$

（$0.4\leqq S_2{}^2\leqq 0.49$ も可）

(4)　母集団は　母平均$m=8$　母分散$\sigma^2=1$ である。

大きさ4 の標本平均$\overline{\mathrm{X}}$ は正規分布$N\left(8,\dfrac{1^2}{4}\right)$ に従う。

$$P(\overline{\mathrm{X}}\geqq 9)=P\left(\frac{\overline{\mathrm{X}}-8}{\sqrt{\frac{1}{4}}}\geqq\frac{9-8}{\sqrt{\frac{1}{4}}}\right)=P(\mathrm{Z}\geqq 2)=0.5-u(2)=0.5-0.4772=0.0228$$

求める確率は0.02